13.11. 21гр. Математика.

Тема урока: Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Криволинейная трапеция.

Цели урока: знать понятие криволинейной трапеции, понятие интеграла, формулу Ньютона-Лейбница, правила нахождения первообразных. Уметь вычислять интегралы.

Ход урока.

1. **Объяснение нового материала.**

Если F(x) - первообразная функции *f(x)* , то разность F(b) - F(a) называется определённым интегралом от функции *f(x)* на отрезке [a ; b] и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$

a – нижний предел интегрирования

b - верхний предел интегрирования

f(x)- подинтегральная функция

Правило вычисления определённого интеграла:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ Формула Ньютона – Лейбница

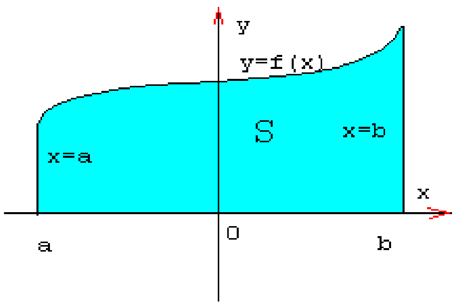
Записать итоговую формулу: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Основные свойства определённого интеграла.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Фигура, изображённая на рисунке является криволинейной трапецией



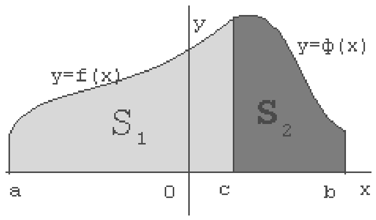
Определение

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной функции *y=f(x),* снизу отрезком [a;b] оси Ox, а с боков отрезками прямых *x=a, x=b*

Площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определённого интеграла

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

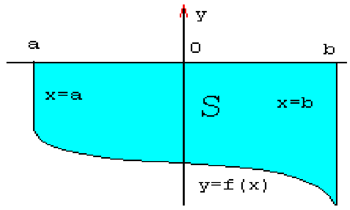
Возможно такое расположение:



$S = S_1 + S_2$

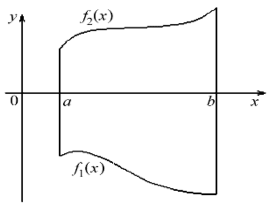
$$S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \phi(x)\,dx$$

Возможен следующий случай, когда *f(x)*< 0 на [a,b]



$$S = \int_a^b -f(x)\,dx$$

Возможно и такое расположение



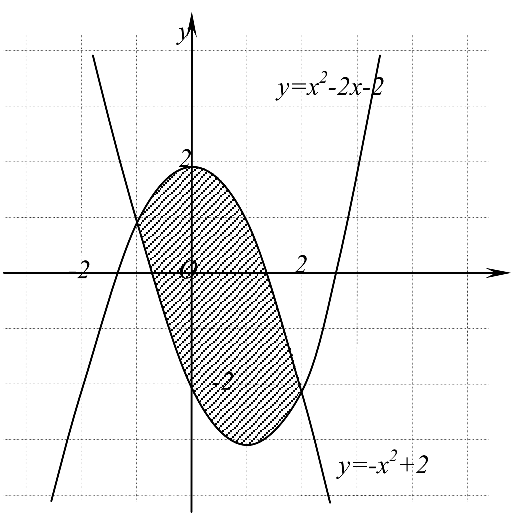
$$S=\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

<u>Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующему плану:</u>

1) по условию задачи делают схематический чертёж;
2) представляют искомую фигуру как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
3) записывают каждую функцию в виде $f(x)$
4) вычисляют площадь каждой криволинейной трапеции и искомой фигуры.

<u>Пример</u>

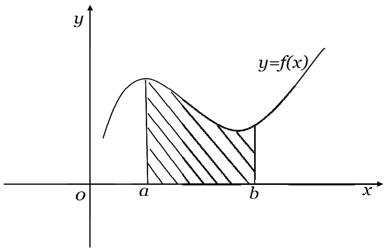
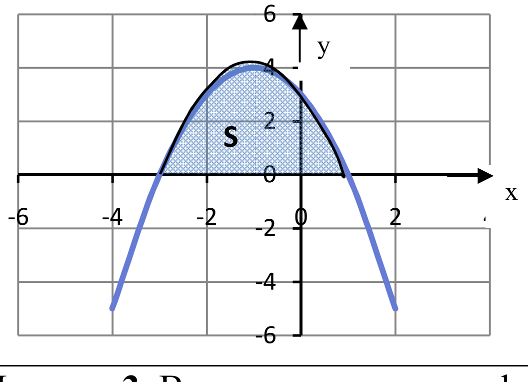
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

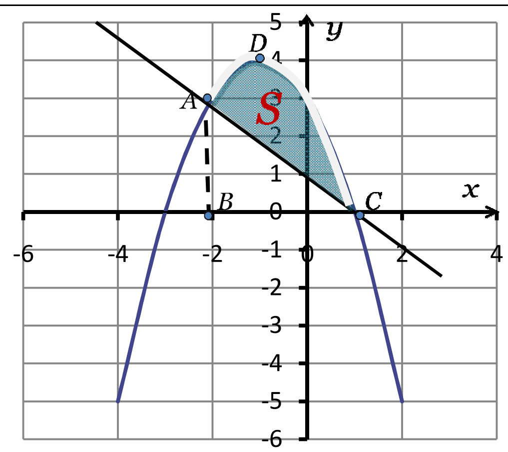


$$S = \int_{-1}^{2}((-x^2+2)-(x^2-2x-2))\,dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx =$$

$$= (-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x)\,|_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - (\frac{2}{3} + 1 - 4) = 9 \text{ (кв. ед.)}$$

Опорный конспект по теме «Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница».

<table>
<tr><td>1.</td><td>Определение: Пусть дана положительная функция f(x), определенная на конечном отрезке [a;b]. Интегралом от функции f(x) на [a;b] называется площадь её криволинейной трапеции.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Обозначение:
Читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»</td><td>$\int_a^b f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Формула Ньютона-Лейбница</td><td>$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="2">Пример 1. Вычислить определённый интеграл: $\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)\,dx$
Решение:</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="2">Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - 2x - x^2$ и осью абсцисс.
Решение:

</td></tr>
<tr><td>6.</td><td colspan="2">Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = 3 - 2x - x^2$ и $y = 1 - x$.
Решение:</td></tr>
</table>



Задача 1 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x-1)\,dx$.

► Одной из первообразных функции $x - 1$ является функция $\frac{x^2}{2} - x$. Поэтому $\int_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 2.

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = 1\frac{1}{3} - \left(-1\frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{3}+1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

2. Закрепление нового материала.

Разобрать следующие примеры:

1) $$\int_{-2}^{3}(x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)+x\Big|_{-2}^{3} = \left(\frac{3^3}{3}+3\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3}+(-2)\right) =$$

$$= 9+3-\left(-\frac{8}{3}-2\right) = 16\frac{2}{3};$$

2) $$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos x dx = \sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

3. Домашняя работа.

- Сделать конспект урока.

- Вычислить интеграл.

1) $\int_{-1}^{2}\left(1-3x^2\right)dx$; 2) $\int_{-2\pi}^{\pi}\sin 2x\,dx$; 3) $\int_{0}^{2} x dx$;

4) Вычисляя интегралы, докажите верные равенства:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1;$$

$$\int_1^2 dx = 1;$$

$$\int_{-3}^0 3x^2 dx = 27;$$

$$\int_0^1 2dx = 2;$$

$$\int_{-2}^{-1} (4x^3 - 2x) dx = -12;$$

$$\int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}.$$