10.11. 2020г. Математика, 22 группа.

Тема урока. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке.

Цели: создание условий для получения алгоритма и использования его для нахождения наибольшего и наименьшего значений функций на промежутке.

Сегодня мы вместе с вами научимся с помощью производной находить наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке.

Большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, или как часто говорят, оптимального решения поставленной задачи. Как, располагая определенными ресурсами, добиться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени – так ставятся вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества. Не все такие задачи поддаются математическому описанию, не для всех из них найдены короткие пути решения. Однако часть таких задач – задач на оптимизацию, поддается исследованию с помощью методов математического анализа – это задачи, которые можно свести к нахождению наибольшего и наименьшего значения функции. И исходя из большой практической значимости, задание на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке включены в ЕГЭ по математике.

Наиболее важной ситуацией является следующая: функция $y=f(x)$ задана на $[a;b]$ и имеет производную во всех точках этого отрезка. Необходимо найти её наибольшее и наименьшее значение на $[a;b]$.

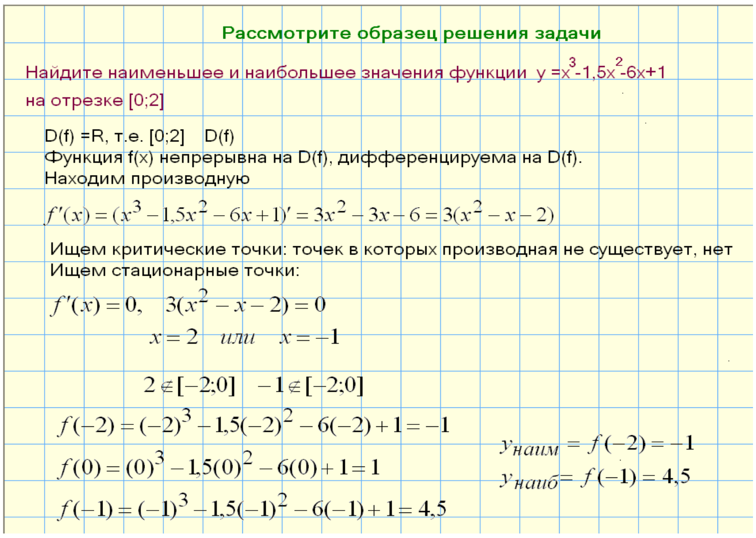
Должны быть сделаны следующие выводы: Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значения.

1) Наименьшего и наибольшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.
2) Если наибольшее (или наименьшее) значения функции достигается внутри отрезка, то либо в критических точках, либо в стационарных точках.
3) Если функция $y=f(x)$ не имеет на отрезке$[a;b]$ критических и стационарных точек, тогда

а) если f′(x)>0 на (a; b)⇒< f(x) – возрастает на [a;b], поэтому наибольшее значение на отрезке функция принимает в точке b (правом конце промежутка), а наименьшее в точке a (в левом конце промежутка).

б) если f′(x) <0 на (a; b)⇒ f(x) – убывает на [a;b], поэтому наибольшее значение на отрезке функция принимает в точке a (в левом конце промежутка), а наименьшее в точке b (в правом конце промежутка).

На основании выше сказанного вы сформировали алгоритмы.



Алгоритм

1. **Найти D(f), содержится ли [a;b] в D(f)**
2. **Определить непрерывность и дифференцируемость функции на D(f)**
3. **Найти производную f′(x)**
4. **Найти стационарные и критические точки функции.**
5. **Выбрать те , которые лежат внутри отрезка [a;b]**
6. **Вычислить значения функции y=f(x), в отобранных на пятом шаге и на концах отрезка.**

Выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это $y_{наиб}$)

Задания для работы на уроке

1. Рассмотрите образец решения задачи и выделите шаги его решения.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на отрезке $[-2;0]$

$D(f) = R$, т.е. $[-2;0] \subset D(f)$

Функция f(x) непрерывна на D(f), дифференцируема на D(f).

Находим производную

$$f'(x) = (x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1)' = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$$

Ищем критические точки: точек в которых производная не существует, нет

Ищем стационарные точки:

$$f'(x) = 0, \quad 3(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x = 2 \quad или \quad x = -1$$

$$2 \notin [-2;0] \quad -1 \notin [-2;0]$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 1{,}5(-2)^2 - 6(-2) + 1 = -1$$

$$f(0) = (0)^3 - 1{,}5(0)^2 - 6(0) + 1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 1{,}5(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 4{,}5$$

$$y_{\underset{[-2;0]}{наим}} = f(-2) = -1$$

$$y_{\underset{[-2;0]}{наиб}} = f(-1) = 4{,}5$$

а.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ на отрезке [0; 3]

Решение. Действуем в соответствии с алгоритмом.

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

3) Стационарные точки: x = 1; x = 2.

$1 \in (0;\ 3);\ 2 \in (0;\ 3)$

4) f(0) = -2

f(3) = 7

f(1) = 3

f(2) = 2

5) $f_{наим.} = f(0) = -2$

$f_{наиб.} = f(3) = 7$.

Ответ: $f_{наим} = -2$

$f_{наиб.} = 7$.

Домашнее задание.

1. **Записать алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции с помощью производной.**
2. **Выполнить следующие задания.**

1. Найдите наименьшее значение функции на отрезке $f(x) = 3x^2 - 12x + 1, [1;4]$

1) –8; 2) –11; 3) 12; 4) 8.

2. Найдите наибольшее значение функции на отрезке $f(x) = 1 + 8x - x^2$, [2; 5]

1) 17; 2) 16; 3) 13; 4) 20.